Olimpíada de Física

Introdução ao Cálculo Diferencial e Integral

Prof. Dr. Ivan Guilhon

Introdução

A matemática e física são áreas do conhecimento intimamente ligadas devido à intensa modelagem quantitativa dos fenômenos naturais realizada pela ciência moderna. Dessa forma, muitas vezes quando queremos descrever um fenômeno podemos esbarrar em dificuldades puramente matemáticas. É de fundamental importância, portanto, contar com uma bagagem de conhecimentos matemáticos robusta para enfrentar problemas não-triviais.

Os conceitos físicos estudados no ensino médio não são fundamentalmente diferentes dos utilizados em olimpíadas internacionais e em outras competições de alto nível. Na maior parte das vezes, a principal diferença entre essas duas situações consiste no nível de formulação matemática exigido pelos problemas.

O objetivo deste material de estudo não é realizar demonstrações detalhadas e rigorosas de teoremas matemáticos, ou avaliar condições de continuidade, diferenciabilidade e integrabilidade de diferentes funções. O nosso objetivo primordial é apresentar ferramentas matemáticas que possibilitem um aluno que conhecimento profundo em cálculo atacar problemas de física mais elaborados. Destacamos algumas dos assuntos abordados aqui:

- Derivada de uma função
- Integral de uma função
- Gradiente de um campo escalar
- Resolução de Equações Diferenciais

Caso você tenha correções ao material ao sugestão de novos assuntos a serem abordados, por favor entrar em contato pelo e-mail nivel.olimpico@gmail.com.
Bons estudos!

Derivada de uma função

Esse é um conteúdo visto em Cálculo 1 que necessita de noções de limite. A notação $\lim_{x \to a}$ indica que o valor de x deve ter tomado muito próximo de a, sem necessariamente chegar a ser igual a esse valor. A partir de fuma função $f(x)$, vamos obter uma função derivada $f'(x)$. Vejamos a sua definição matemática:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \forall\ a \in D.$$

A interpretação geométrica do valor encontrado corresponde à inclinação da reta tangente ao gráfico de $f(x)$. O valor da derivada expressa uma taxa de variação. Uma derivada positiva indica que a função é crescente, enquanto um valor negativo implica que a função é decrescente. A derivada temporal de uma função $x(t)$, por exemplo, tem o significado de velocidade instantânea.

Um valor igual a zero para a derivada da função indica um **ponto crítico,** que pode ser um máximo local, um mínimo local ou simplesmente um ponto de inflexão (é um ponto em que a concavidade da função muda).

Na maioria das vezes não usamos a definição para calcular a derivada, usamos regras práticas como a regra da cadeia, ou as propriedades da derivada. Vamos apresentar as derivadas de funções elementares:

$$f(x)=x^n \rightarrow f'(x)=n x^{n-1}$$

$$f(x)=sen\, x \rightarrow f'(x)=\cos x$$

$$f(x)=\cos x \rightarrow f'(x)=-sen\, x$$

$$f(x)=e^x \rightarrow f'(x)=e^x$$

$$f(x)=\ln x \rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}$$

Tais resultados seguem diretamente da definição de derivada e constituíram o nosso ponto de partida. Para derivar outras funções não tão simples podemos usar as propriedades da derivada e a regra da cadeia.

<u>PROPRIEDADES DA DERIVADA:</u>

Sejam as funções f e g deriváveis. Podemos dizer que:

1. A função $(f \pm g)$ é derivável e $(f \pm g)'(x)=f'(x) \pm g'(x)$.

2. Sendo $c \in R, c\,.\,f(x)$ é derivável e $(cf)'(x)=c\,.\,f'(x)$

3. A função (fg) é derivável e $(fg)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$.

4. Se $g(x) \neq 0$, for satisfeita, a função $\left(\frac{f}{g}\right)$ é derivável e

   $\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$.

Regra da Cadeia

A regra da cadeia será o nosso próximo recurso para calcular derivadas. Considere duas funções deriváveis f e g. Podemos calcular a derivada da função $g \circ f$ com a fórmula:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)).f'(x)$$

Derivadas parciais

Consideraremos agora funções que dependem de mais de uma variável. Nessa situação não falamos de uma derivada ordinária, mas sim de derivadas parciais com relação a uma variável.

Exemplo: Derivar a função $f(x, y) = (x + y)xy$ em relação a x no ponto (2,3).

Nessa situação variamos apenas a variável em questão e tratamos as outras variáveis como se fossem constantes.

Aplicações

As aplicações de derivadas são inumeráveis, servindo de base elementar para muitos outros conhecimentos. Uma das aplicações mais imediatas na física desses conhecimentos é na cinemática, em que a velocidade é a derivada temporal da posição e a aceleração é a derivada temporal da velocidade.

Exercícios

Vejamos alguns exemplos que podem fixar e treinar, se necessário, o que vimos até este ponto.

1) Calcule a derivada das funções:
   a) $f(x) = 2$
   b) $f(x) = 3x^3 + 2x + 2$
   c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$
   d) $f(x) = tg(x)$
   e) $f(x) = sen(2x)$
   f) $f(x) = 2sen^3 x + \cos^2 x$
   g) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

O uso de derivada é essencial quando lidamos com problemas de máximos e mínimos. No ponto crítico, o valor da derivada é zero!

2) Determine as dimensões do retângulo de área máxima e cujo perímetro 2p é fixado.
3) Encontre o ponto da curva $y = \frac{1}{x}$, x > 0, que está mais próximo da origem.

4) Calcule a derivada parcial das funções abaixo com relação a x.
   a) $f(x,y)=sen\,x\,.\cos y$
   b) $f(x,y)=e^{2x+3y}$
   c) $f(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$
   d) $f(x,y)=x^3+x^2y^2+2xy+y+1$

Gradiente

Quando tratamos de uma função de uma variável apenas, a derivada é suficiente para estudar a variação da função. Quando temos mais de uma variável, temos de fazer outro tipo de estudo, pois a função pode variar de forma diferente dependendo de cada uma das variáveis. Vamos introduzir o conceito de gradiente para esses casos.

Considere, por exemplo, uma função de três variáveis $f(x,y,z)$, que admite derivada parcial em relação a cada uma das variáveis, definimos o vetor gradiente de f no ponto a como:

$$\vec{\nabla} f(a)=grad\,f(a)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a),\frac{\partial f}{\partial y}(a),\frac{\partial f}{\partial z}(a)\right)$$

O vetor obtido desta forma tem propriedades interessantes, uma das principais é que ele aponta na direção de maior crescimento da função. Podemos essa quantidade vetorial derivada de uma quantidade escalar em várias áreas. Citaremos dois exemplos:

i. Calcula-se a força associada a energia potencial calculando-se um gradiente.

$$\vec{F}=-\vec{\nabla}U$$

ii. Pode-se obter o campo elétrico a partir do gradiente do potencial elétrico calculando o vetor gradiente deste.

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}V$$

Analogamente aos problemas de uma única variável, podemos identificar pontos de máximo e mínimo, calculando o gradiente de uma função e igualando ao vetor nulo. Deve-se no entanto efetuar testes para saber se os pontos encontrados tratam-se de pontos de mínimo, máximo ou de sela.

Exercícios

Vejamos alguns exemplos que podem fixar o que vimos até este ponto.

5) Calcule o gradiente das funções:
   a) $f(x,y)=x^2y$
   b) $f(x,y)=3x^3y+2x+2$
   c) $f(x,y,z)=\frac{-k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

6) (FIFT-2009) Calcule o gradiente da função genérica $V(r)=V(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$.

Integral de uma função

Podemos dizer que a integração de uma função é uma operação inversa da derivação da mesma. Logo, quando integramos uma função$f(x)$em um intervalo fechado $[a,b]$,estamos buscando uma nova função $F(x)$, que quando derivada obtemos $f(x)$. Definimos o valor da integral da seguinte forma:

$$\int_a^b f(x).dx=F(b)-F(a)$$

A interpretação geométrica do valor encontrado corresponde à área sob o gráfico de $f(x)$. Um valor de integral positivo indica que estamos falando de uma área acima do eixo, enquanto um valor negativo indica uma área abaixo do eixo.

Não usaremos a definição de integral rigorosa, já que ela tem haver com limites de somatórios, somas inferiores e superiores nem noções de integrabilidade.

Apresentamos agora, algumas integrais de funções elementares:

$$f(x)=x^n \rightarrow \int f(x)\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}, se\, n\neq -1$$

$$f(x)=sen\, x \rightarrow \int f(x)dx=-\cos x$$

$$f(x)=\cos x \rightarrow \int f(x)\,dx=sen\, x$$

$$f(x)=e^x \rightarrow \int f(x)\,dx=e^x$$

$$f(x)=\frac{1}{x} \rightarrow \int f(x)\,dx=\ln x$$

<u>PROPRIEDADES DA INTEGRAL:</u> Sejam as funções f e g integráveis. Podemos dizer que:

1. A função $(f\pm g)$ é integrável e $\int (f\pm g)dx=\int f(x)\,dx\pm\int g(x)\,dx$.

2. Sendo $c\in R$, $c.f(x)$ é integrável e $\int (cf)(x)\,dx=c\int f(x)\,dx$.

3. Sendo $c\in[a,b]$, temos que: $\int_a^b f(x).dx=\int_a^c f(x).dx+\int_c^b f(x).dx$

4. : $\int_a^b f(x).dx=-\int_b^a f(x).dx$

5. $\int_{a}^{a} f(x).dx=0$

Em geral, derivar uma função é bem mais fácil do que integrar uma função, por isso existem métodos de integração específicos para diferentes tipos de funções.

Exercícios

Vamos treinar o que já vimos de integral e aprender métodos de integração.

7) Calcule as integrais das funções:
   a) $f(x)=sen(3x+1)$
   b) $f(x)=4x^3+2x$, no intervalo [1,2].
   c) $f(x)=sec^2(x)$

Método da Substituição

$$\int f(g(x))g'(x).dx=F(g(x))+C$$

$onde\ F(x)\ é\ a\ primitiva\ de\ f(x)\ e\ C\ uma\ constante\ real.$

8) Calcule as integrais das funções:
   a) $\int x\cos(x^2).dx$
   b) $\int \frac{3x^2+3}{x^3+3x}.dx$
   c) $\int sen^3(x)\cos(x).dx$

Mudança de variável

Vamos ilustrar esse método por meio de um exercício resolvido.

Exemplo: $\int \sqrt{1-x^2}dx$

Fazendo $x=sen\theta$. Temos que $\frac{dx}{d\theta}=cos\theta$, logo: $dx=cos\theta\, d\theta$

$$F(x)=\int \sqrt{1-x^2}.dx=\int \sqrt{1-sen^2\theta}.cos\theta\, d\theta$$

$$F(\theta)=\int \cos^2\theta\, d\theta=\int \frac{\cos 2\theta+1}{2}d\theta$$

$$F(\theta)=\int \frac{\cos 2\theta}{2}d\theta+\int \frac{1}{2}d\theta$$

$$F(\theta)=\frac{\theta}{2}+\frac{sen 2\theta}{4}+c$$

Basta agora fazer $\theta = arc\,sen(x)$. Para encontrar a primitiva da função, mas esse passo nem sempre é necessário nos problemas de física.

9) Calcule as integrais das funções:
   a) $\int \sqrt{1+x^2}\,dx$
   b) $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx, onde\ a \in R$

Integração por partes

Vamos seguir o seguinte raciocínio a partir da derivada do produto.

$(fg)' = f'g + fg' \, (I)$

Integrando (I) e passando o termo $f'g$ para o outro lado:

$\int (fg')(x)dx = (fg)(x) - \int (f'g)(x)\,dx$¿

10) Calcule as integrais das funções:
   a) $\int x e^x\,dx$
   b) $\int \ln x\,dx$
      Dica: Faça $\ln(x) = 1.\ln(x)$